

# 수학 영역(가형)

제 2 교시

1

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{2}$     ②  $\frac{3}{4}$     ③ 1    ④  $\frac{5}{4}$     ⑤  $\frac{3}{2}$

2. 반지름의 길이가 4, 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴의 호의 길이는?  
[2점]

- ①  $\frac{\pi}{4}$     ②  $\frac{\pi}{2}$     ③  $\frac{3}{4}\pi$     ④  $\pi$     ⑤  $\frac{5}{4}\pi$

3. 쌍곡선  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 점근선의 방정식이  $y = kx$ ,  $y = -kx$ 이다.  
양수  $k$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{5}$     ②  $\frac{2}{5}$     ③  $\frac{3}{5}$     ④  $\frac{4}{5}$     ⑤ 1

4. 닫힌 구간  $[2, 4]$ 에서 함수  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 의 최솟값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{32}$     ②  $\frac{1}{16}$     ③  $\frac{1}{8}$     ④  $\frac{1}{4}$     ⑤  $\frac{1}{2}$

5.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{6}$     ②  $\frac{1}{4}$     ③  $\frac{1}{3}$     ④  $\frac{5}{12}$     ⑤  $\frac{1}{2}$

6. 곡선  $y = x^2 - 2x \ln x$ 의 변곡점의  $x$ 좌표는? [3점]

- ① 1    ②  $\sqrt{e}$     ③ 2    ④  $e$     ⑤ 3

7. 자연수 5의 분할 중 3 이하의 자연수의 합으로 나타내어지는 분할의 수는? [3점]

- ① 3    ② 4    ③ 5    ④ 6    ⑤ 7

8. 곡선  $x^3 + xy - y^2 = 0$  위의 점  $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는?  
[3점]

- ①  $\frac{13}{6}$     ②  $\frac{7}{3}$     ③  $\frac{5}{2}$     ④  $\frac{8}{3}$     ⑤  $\frac{17}{6}$

10.  $\left(\frac{x}{2} + \frac{a}{x}\right)^6$ 의 전개식에서  $x^2$ 의 계수가 15일 때, 양수  $a$ 의 값은?  
[3점]

- ① 4    ② 5    ③ 6    ④ 7    ⑤ 8

9.  $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식  $2\sin x + 1 < 0$ 의 해가  $\alpha < x < \beta$ 일 때,  
 $\cos(\beta - \alpha)$ 의 값은? [3점]

- ①  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     ②  $-\frac{1}{2}$     ③ 0  
④  $\frac{1}{2}$     ⑤  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 함수  $f(x) = \frac{x}{2} + 2\sin x$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를

$g(x) = (f \circ f)(x)$ 라 할 때,  $g'(\pi)$ 의 값은? [3점]

- ①  $-1$       ②  $-\frac{7}{8}$       ③  $-\frac{3}{4}$       ④  $-\frac{5}{8}$       ⑤  $-\frac{1}{2}$

12. 좌표평면 위에 두 점  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ )을 초점으로

하고 점  $A(0, 1)$ 을 지나는 타원  $C$ 가 있다. 두 점  $A$ ,  $F'$ 을 지나는 직선이 타원  $C$ 와 만나는 점 중 점  $A$ 가 아닌 점을  $B$ 라 하자.

삼각형  $ABF$ 의 둘레의 길이가 16일 때, 선분  $FF'$ 의 길이는?

[3점]

- ① 6      ②  $4\sqrt{3}$       ③  $2\sqrt{15}$       ④  $6\sqrt{2}$       ⑤  $2\sqrt{21}$

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 의 도함수  $f'(x)$ 가

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x < 1) \\ \ln x & (x > 1) \end{cases}$$

이다.  $f(e)=2$ 일 때,  $f(-6)$ 의 값은? [3점]

- ① 9      ② 11      ③ 13      ④ 15      ⑤ 17

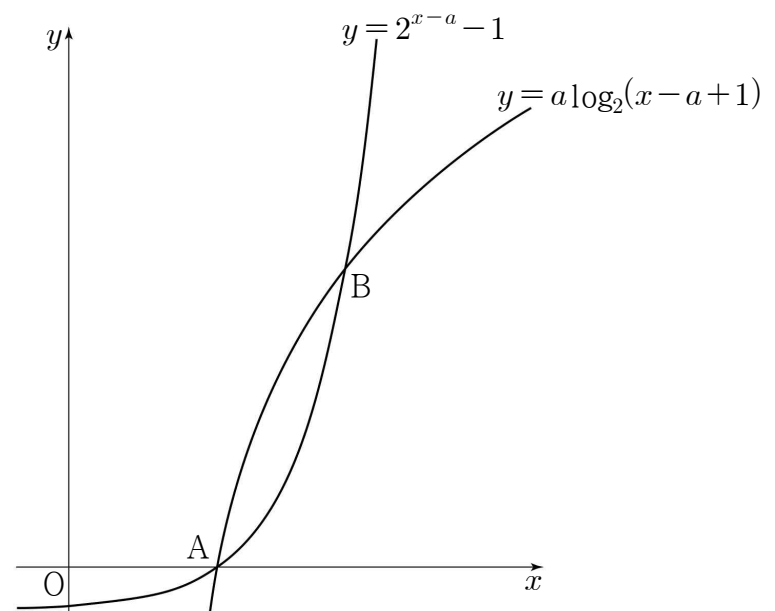
14. 그림과 같이  $a > 1$ 인 실수  $a$ 에 대하여

두 곡선  $y = a \log_2(x-a+1)$ 과  $y = 2^{x-a} - 1$ 이

서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A가  $x$ 축 위에 있고

삼각형 OAB의 넓이가  $\frac{7}{2}a$ 일 때, 선분 AB의 중점은  $M(p, q)$ 이다.

$p+q$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

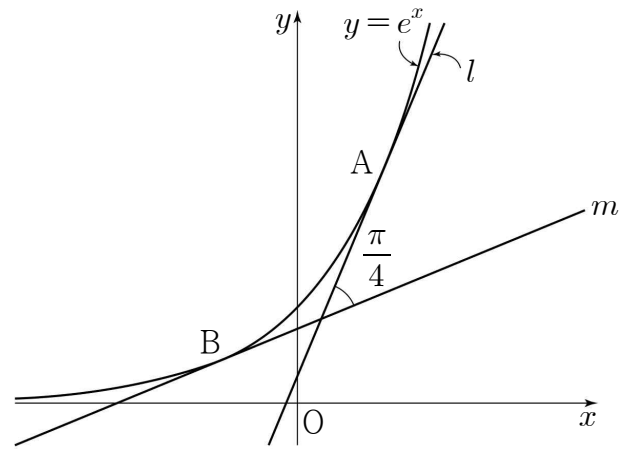


- ①  $\frac{13}{2}$       ② 7      ③  $\frac{15}{2}$       ④ 8      ⑤  $\frac{17}{2}$

15. 곡선  $y = \frac{1}{x}$  과 두 직선  $x = 1, x = 2$  및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S$ 라 하자. 곡선  $y = \frac{1}{x}$  과 두 직선  $x = 1, x = a$  및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가  $2S$ 가 되도록 하는 모든 양수  $a$ 의 값의 합은? [4점]

- ①  $\frac{15}{4}$     ②  $\frac{17}{4}$     ③  $\frac{19}{4}$     ④  $\frac{21}{4}$     ⑤  $\frac{23}{4}$

16. 그림과 같이 곡선  $y = e^x$  위의 두 점  $A(t, e^t), B(-t, e^{-t})$  에서의 접선을 각각  $l, m$ 이라 하자. 두 직선  $l$ 과  $m$ 이 이루는 예각의 크기가  $\frac{\pi}{4}$ 일 때, 두 점  $A, B$ 를 지나는 직선의 기울기는? (단,  $t > 0$ ) [4점]



- ①  $\frac{1}{\ln(1 + \sqrt{2})}$     ②  $\frac{1}{\ln 2}$     ③  $\frac{4}{3\ln(1 + \sqrt{2})}$   
 ④  $\frac{7}{6\ln 2}$     ⑤  $\frac{3}{2\ln(1 + \sqrt{2})}$

17.  $a > e$ 인 실수  $a$ 에 대하여

두 곡선  $y = e^{x-1}$ 과  $y = a^x$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표를  $f(a)$ 라 할 때,

$\lim_{a \rightarrow e^+} \frac{1}{(e-a)f(a)}$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{1}{e^2}$       ②  $\frac{1}{e}$       ③ 1      ④  $e$       ⑤  $e^2$

18. 그림과 같이 포물선  $y^2 = 16x$ 에 대하여

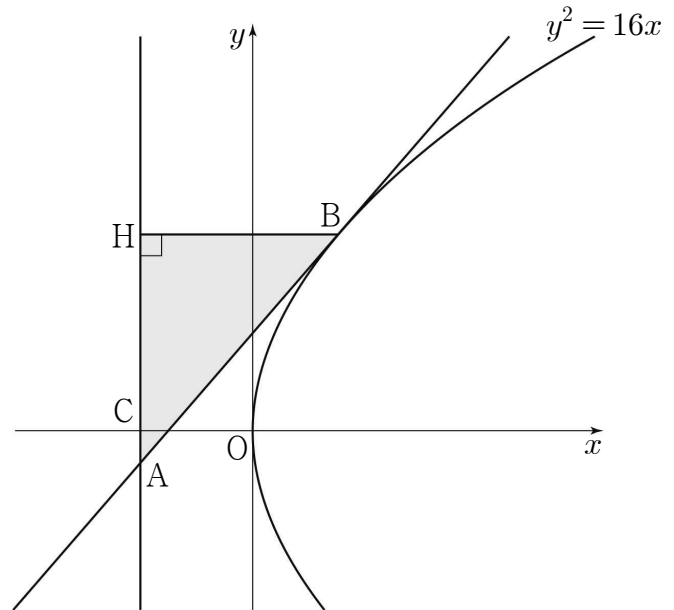
포물선의 준선 위의 한 점 A가 제3사분면에 있다.

점 A에서 포물선에 그은 기울기가 양수인 접선과 포물선이

만나는 점을 B, 점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H,

준선과  $x$ 축이 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{AC} \times \overline{CH} = 8$ 일 때, 삼각형 ABH의 넓이는? [4점]



- ①  $15\sqrt{3}$       ②  $\frac{46}{3}\sqrt{3}$       ③  $\frac{47}{3}\sqrt{3}$   
 ④  $16\sqrt{3}$       ⑤  $\frac{49}{3}\sqrt{3}$

19. 다음은 1부터  $n$ 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는  $n$ 개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 세 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단,  $n \geq 5$ )

주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는

‘(i) 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우’에서

‘(ii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우’와

‘(iii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우’를 제외하면 된다.

(i)의 경우 :

$n$ 개의 공이 들어 있는 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수는  ${}_nC_3$ 이다.

(ii)의 경우 :

주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우의 수는  $(n-2)$ 이다.

(iii)의 경우 :

연속되는 두 수 중 하나가 1인 경우의 수는

이고, 마찬가지로 연속되는 두 수 중 하나가  $n$ 인 경우의 수도 이다.

또한 연속되는 두 수 중 어느 하나도 1과  $n$ 이 아닌 경우의 수는 이다.

따라서 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우의 수는  $2 \times (\text{가}) + \text{나}$ 이다.

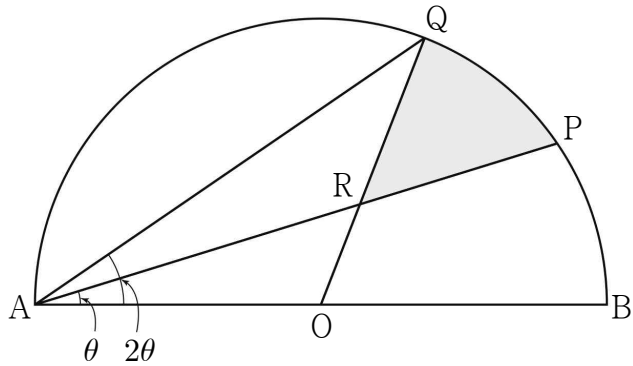
(i), (ii), (iii)에 의하여  $n$ 개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각  $p(n)$ ,  $q(n)$ ,  $r(n)$ 이라 할 때,  $\frac{p(18) \times q(17)}{r(16)}$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{15}{2}$     ② 9    ③  $\frac{21}{2}$     ④ 12    ⑤  $\frac{27}{2}$

20. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를  $\angle PAB = \theta$ ,  $\angle QAB = 2\theta$ 가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OQ와 선분 AP가 만나는 점을 R라 하자. 호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S(\theta)$ 라 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ )

[4점]



- ①  $\frac{4}{3}$     ②  $\frac{5}{3}$     ③ 2    ④  $\frac{7}{3}$     ⑤  $\frac{8}{3}$



21.  $\frac{3}{5} < x < 4$ 에서 정의된 미분가능한 함수  $f(x)$ 가  $f(1)=2$ 이고

$$f'(x) = \frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수  $f(x)$ 의 역함수  $g(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

ㄱ.  $g'(2) = -\frac{4}{7}$

ㄴ.  $g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$

ㄷ.  $2 < g(1) < \frac{5}{2}$

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 방정식  $\log_3(x+2)=3$ 을 만족시키는 실수  $x$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수  $f(x)=x\sqrt{x}$ 에 대하여  $f'(16)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표평면에서 곡선  $y = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 위의 점 중  $y$ 좌표가 정수인 점의 개수를 구하시오. [3점]

26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 7개를 선택할 때, 짝수가 두 개가 되는 경우의 수를 구하시오. [4점]

25. 함수  $f(x) = \frac{x}{x^2+x+8}$ 에 대하여 부등식  $f'(x) > 0$ 의 해가  $\alpha < x < \beta$ 일 때,  $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 자연수  $n$ 에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \int_1^x \frac{n - \ln t}{t} dt$$

의 최댓값을  $g(n)$ 이라 하자.  $\sum_{n=1}^{12} g(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 두 초점이  $F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$ 이고,

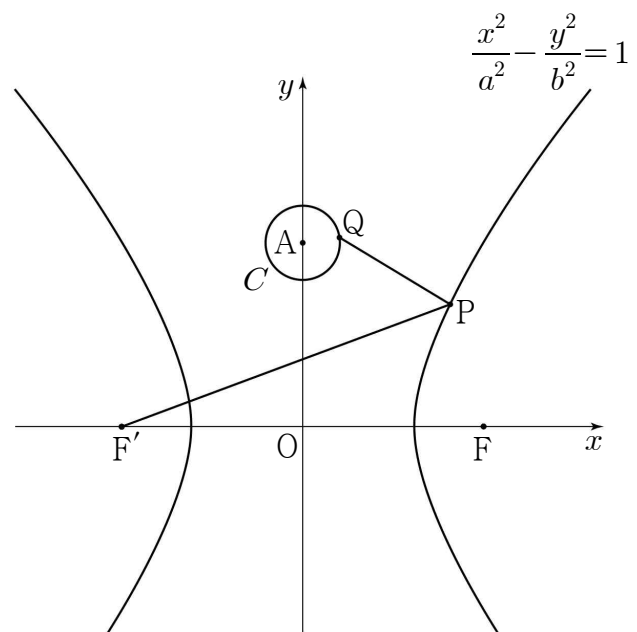
주축의 길이가 6인 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과

점  $A(0, 5)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원  $C$ 가 있다.

제1사분면에 있는 쌍곡선 위를 움직이는 점  $P$ 와 원  $C$  위를

움직이는 점  $Q$ 에 대하여  $\overline{PQ} + \overline{PF'}$ 의 최솟값이 12일 때,

$a^2 + 3b^2$ 의 값을 구하시오. (단,  $a$ 와  $b$ 는 상수이다.) [4점]



29. 집합  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 로의 함수 중에서

$$f(1) + f(2) + f(3) - f(4) = 3m \quad (m \text{은 정수})$$

를 만족시키는 함수  $f$ 의 개수를 구하시오. [4점]

30. 함수  $f(x) = e^x(ax^3 + bx^2)$ 과 양의 실수  $t$ 에 대하여 닫힌 구간  $[-t, t]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값을  $M(t)$ , 최솟값을  $m(t)$ 라 할 때, 두 함수  $M(t), m(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 양의 실수  $t$ 에 대하여  $M(t) = f(t)$ 이다.  
 (나) 양수  $k$ 에 대하여 닫힌 구간  $[k, k+2]$ 에 있는 임의의 실수  $t$ 에 대해서만  $m(t) = f(-t)$ 가 성립한다.

$$(다) \int_1^5 \{e^t \times m(t)\} dt = \frac{7}{3} - 8e$$

$f(k+1) = \frac{q}{p}e^{k+1}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $a$ 와  $b$ 는 0이 아닌 상수,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이고,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ 이다.) [4점]

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.