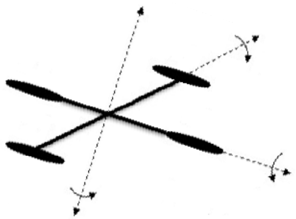
9장 벡터의 미적분 (1)



- 벡터함수

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

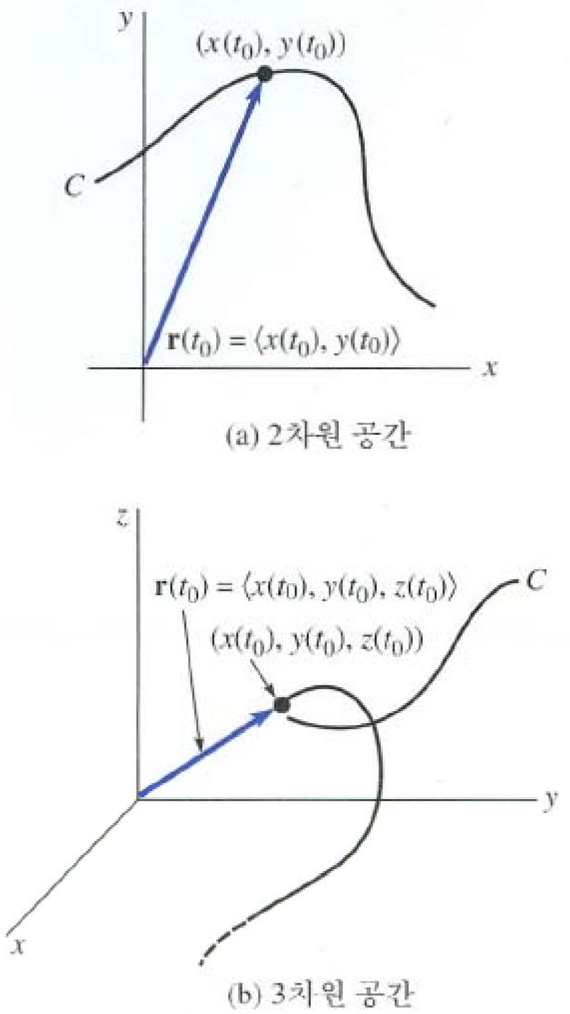


그림 9.1 벡터함수로 정의되는 곡선

예제 1 **원 나선**

벡터함수

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0$$

가 나타내는 곡선의 그래프를 그리라.

풀이 곡선의 매개방정식이 $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=t$ 이므로 처음 두 식에서

$$x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (2\sin t)^2 = 2^2$$

이다. 따라서 곡선의 점들은 원기둥 $x^2+y^2=4$ 위에 존재하며 그림 9.2와 표에 나와 있듯이 t가 증가함에 따라 위 방향으로 진행하는 원 나선(circular helix)을 그리게 된다. ❑

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}, \quad a>0, \quad b>0, \quad c>0$$

t	x	y	z
0	2	0	0
$\pi/2$	0	2	$\pi/2$
π	-2	0	π
$3\pi/2$	0	-2	$3\pi/2$
2π	2	0	2π
$5\pi/2$	0	2	$5\pi/2$
3π	-2	0	3π
$7\pi/2$	0	-2	$7\pi/2$
4π	2	0	4π
$9\pi/2$	0	2	$9\pi/2$

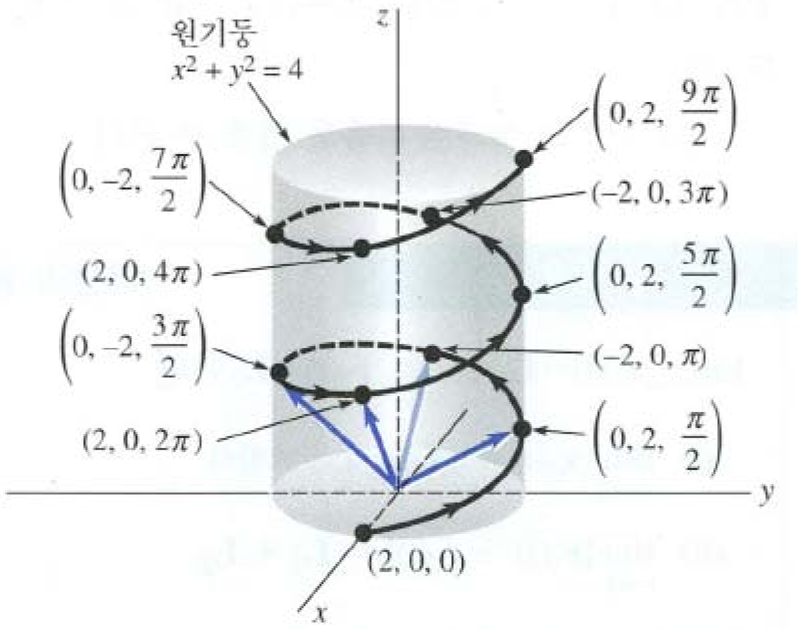
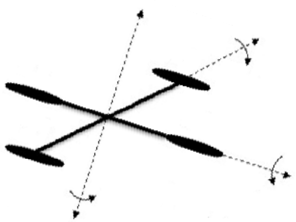


그림 9.2 예제 1의 원 나선



예제 2 **평면 위의 원**

벡터함수

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

가 나타내는 곡선의 그래프를 그리라.

풀이 매개방정식이 $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=3$이므로 예제 1에서와 마찬가지로 곡선의 점들은 원기둥 $x^2+y^2=4$ 위에 존재한다. 하지만 곡선 위의 모든 점은 일정한 값 $z=3$을 z 성분으로 가지므로 그림 9.3과 같이 벡터함수 $\mathbf{r}(t)$는 xy 평면으로부터 높이가 3인 평면 위의 원을 나타낸다. ❑

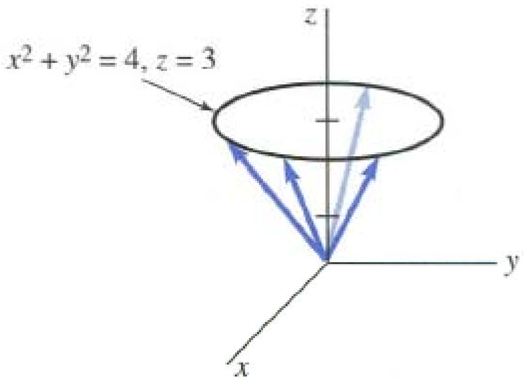


그림 9.3 예제 2의 곡선

예제 3 곡면의 교선

평면 $y=2x$ 와 포물면(paraboloid) $z=9-x^2-y^2$ 의 교선(intersection) C 를 그리는 벡터함수를 구하라.

풀이 먼저 $x=t$ 로 놓고 곡선을 매개화한다. $y=2t$ 이고 $z=9-t^2-(2t)^2=9-5t^2$ 이므로 곡선 C 를 나타내는 벡터함수는 $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+(9-5t^2)\mathbf{k}$ 이다. 그림 9.4 를 참고하라. ❑

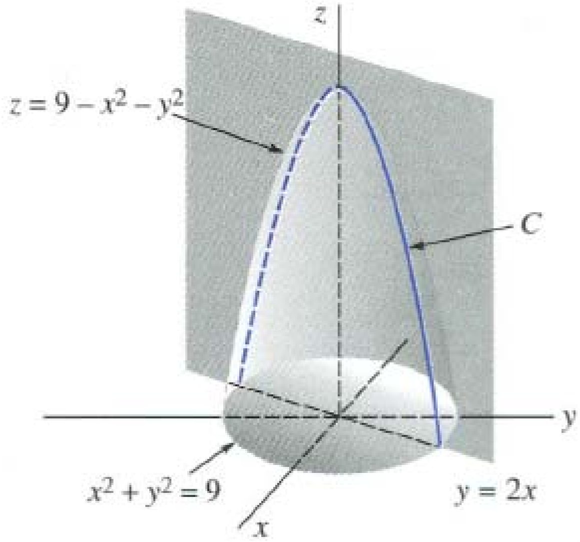
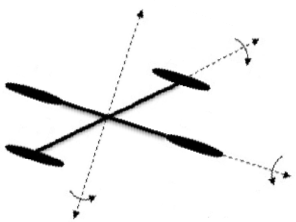


그림 9.4 예제 3 의 곡선



- 벡터의 극한

정의 9.1 벡터함수의 극한

$\lim_{t\to a} f(t)$, $\lim_{t\to a} g(t)$, $\lim_{t\to a} h(t)$가 존재하면

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle$$

이다.

정리 9.1 극한의 성질

$\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{L}_1$, $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_2$이면

(*i*) $\lim_{t\to a} c\mathbf{r}_1(t) = c\mathbf{L}_1$, c는 스칼라

(*ii*) $\lim_{t\to a} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$

(*iii*) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2$

이다.

정의 9.2 벡터함수의 연속

(*i*) $\mathbf{r}(a)$가 정의되고, (*ii*) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t)$가 존재하며, (*iii*) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$이면 벡터함수 $\mathbf{r}$은 $t=a$에서 **연속**이다.

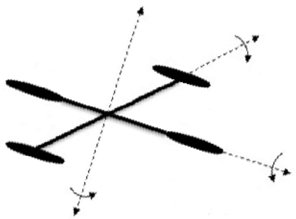
- 벡터의 미분

정의 9.3 벡터함수의 도함수

벡터함수 $\mathbf{r}$의 **도함수**는 극한이 존재하는 모든 t에 대해

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)\right] \tag{2}$$

이다.



정리 9.2 **성분함수의 미분**

미분 가능한 함수 f, g, h에 대해 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$이면

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

이다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \Big[\langle f(t+\Delta t), g(t+\Delta t), h(t+\Delta t) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle \Big] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle
\end{aligned}$$

■ 매끄러운 곡선 벡터함수 $\mathbf{r}$의 성분함수들이 연속인 1계 도함수를 갖고, 열린 구간 (a, b)의 모든 t에 대하여 $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$일 때, $\mathbf{r}$을 **매끄러운 함수**(smooth function)라 하고 $\mathbf{r}$에 의하여 그려지는 곡선을 **매끄러운 곡선**(smooth curve)이라 한다.

■ $\mathbf{r}'(t)$의 기하적 해석 벡터 $\mathbf{r}'(t)$가 점 P에서 $\mathbf{0}$이 아니라면 P에서 곡선에 접하는 접선을 그릴 수 있을 것이다. 그림 9.5에 나와 있듯이 벡터

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad \text{그리고} \quad \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

는 평행하다. 만약 $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{r}/\Delta t$가 존재한다면 $\Delta t \to 0$일 때 $\mathbf{r}(t)$와 $\mathbf{r}(t+\Delta t)$는 한없이 가까워지고, 결론적으로 벡터 $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$의 극한은 점 P에서의 접선이 된다는 결론은 매우 합리적이다. 실제로 P에서의 접선을 $\mathbf{r}'(t)$에 평행하고 P를 지나는 직선으로 정의한다.

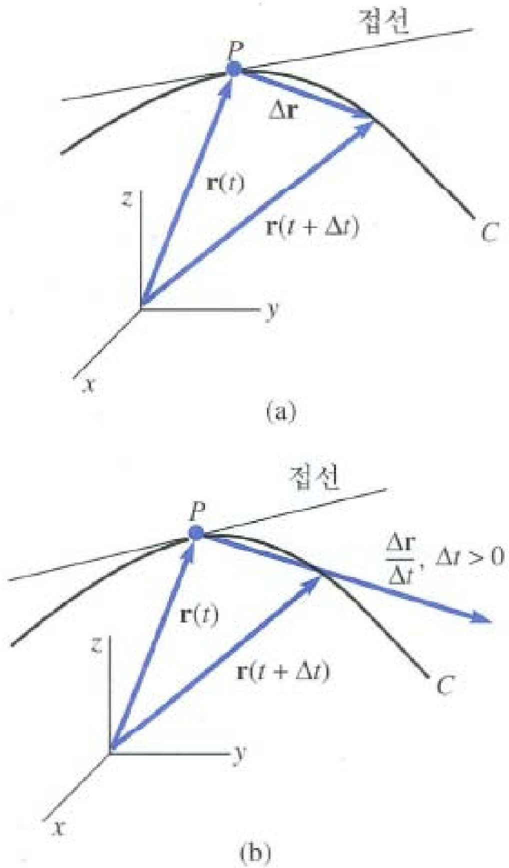
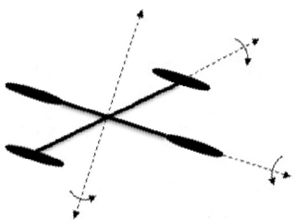
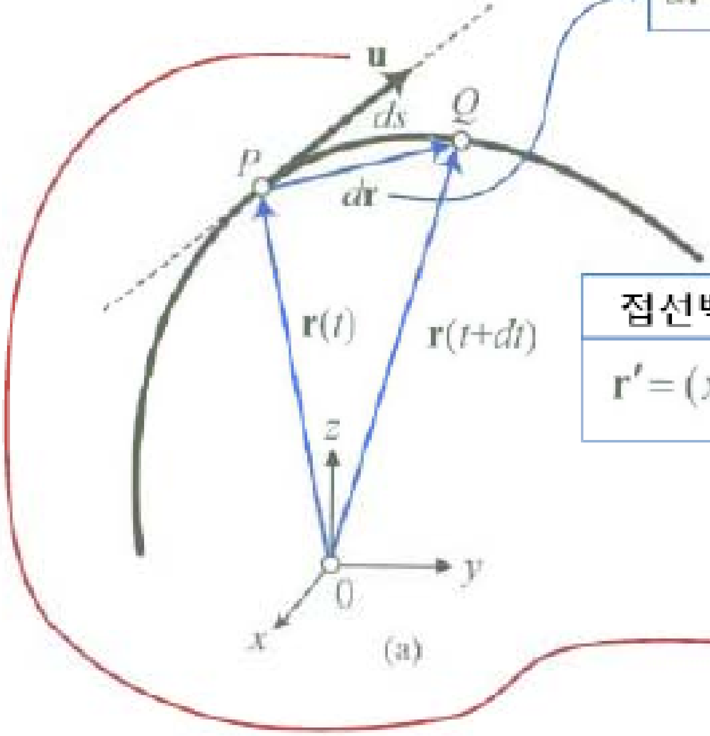


그림 9.5 벡터 $\mathbf{r}'(t)$는 점 P에서 곡선 C의 접선





$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t)}{dt}$$

접선벡터

$$\mathbf{r}' = (x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k})' = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

단위접선벡터 $$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$$

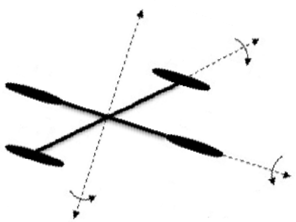
예제 4 접선벡터

$\mathbf{r}(t)=\cos 2t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$에 의해 위치가 정해지는 점 P에 의해 그려지는 곡선 C의 그래프를 그리라. $\mathbf{r}'(0)$과 $\mathbf{r}'(\pi/6)$를 표시하라.

풀이 매개방정식 $x=\cos 2t$, $y=\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$로부터 매개변수를 소거하면 C는 포물선 $x=1-2y^2$, $-1 \le x \le 1$이 된다. $\mathbf{r}'(t)=-2\sin 2t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}$로부터

$$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} \quad \text{그리고} \quad \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

이고, 그림 9.6에서와 같이 이러한 벡터들은 각각 (1, 0)과 (1/2, 1/2)에서 곡선 C에 접한다. ❑



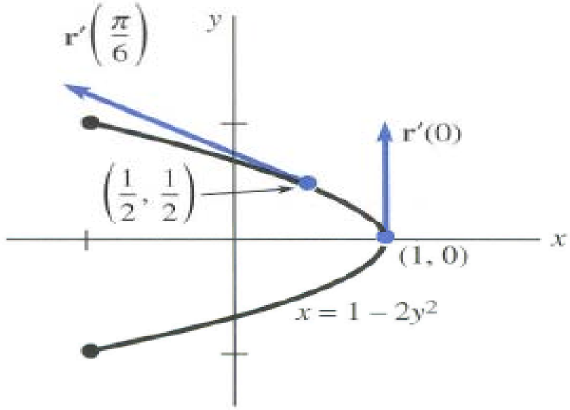


그림 9.6 예제 4의 접선벡터

예제 5 접선

매개방정식이 $x=t^2$, $y=t^2-t$, $z=-7t$인 곡선 C에 대해 $t=3$에서 접선의 매개방정식을 구하라.

풀이 곡선 위의 점 P의 위치를 나타내는 벡터함수는 $\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+(t^2-t)\mathbf{j}-7t\mathbf{k}$이다. 따라서

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + (2t-1)\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \quad \text{그리고} \quad \mathbf{r}'(3) = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

는 위치벡터가

$$\mathbf{r}(3) = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$$

인, 즉 점 $P(9, 6, -21)$에서 곡선의 접선이다. $\mathbf{r}'(3)$의 성분들을 사용하면 접선의 매개방정식이 $x=9+6t$, $y=6+5t$, $z=-21-7t$가 됨을 알 수 있다. ❑

정리 9.3 **연쇄법칙**

$\mathbf{r}$이 미분 가능한 벡터함수이고, $s=u(t)$는 미분 가능한 스칼라 함수이면 $\mathbf{r}(s)$의 t에 대한 도함수는

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{r}'(s)u'(t)$$

이다. 이를 벡터함수의 연쇄법칙(chain rule)이라 한다.

예제 7 연쇄법칙

$\mathbf{r}(s)=\cos 2s\mathbf{i}+\sin 2s\mathbf{j}+e^{-3s}\mathbf{k}$, $s=t^4$이면

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= [-2\sin 2s\,\mathbf{i} + 2\cos 2s\,\mathbf{j} - 3e^{-3s}\mathbf{k}]4t^3 \\ &= -8t^3\sin(2t^4)\mathbf{i} + 8t^3\cos(2t^4)\mathbf{j} - 12t^3e^{-3t^4}\mathbf{k}\end{aligned}$$

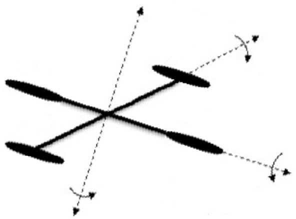
이다. ❑

$$(i)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$$

$$(ii)\quad \frac{d}{dt}[u(t)\mathbf{r}_1(t)] = u(t)\mathbf{r}_1'(t) + u'(t)\mathbf{r}_1(t)$$

$$(iii)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$$

$$(iv)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t)$$



- 벡터의 적분

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$

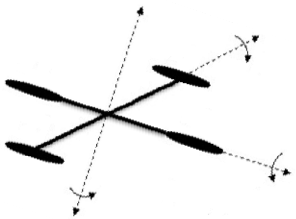
$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$

예제 8 벡터함수의 적분

$\mathbf{r}(t)=6t^2\mathbf{i}+4e^{-2t}\mathbf{j}+8\cos 4t\mathbf{k}$ 이면

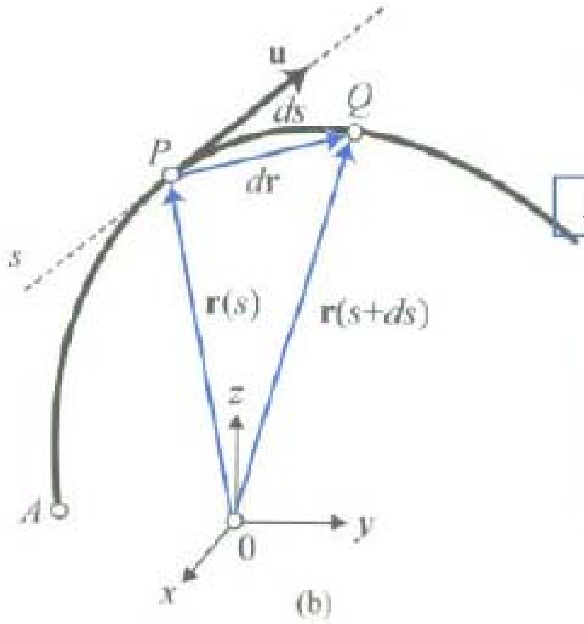
$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\,dt &= \left[\int 6t^2\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int 4e^{-2t}\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int 8\cos 4t\,dt\right]\mathbf{k}\\ &= [2t^3 + c_1]\mathbf{i} + [-2e^{-2t} + c_2]\,\mathbf{j} + [2\sin 4t + c_3]\,\mathbf{k}\\ &= 2t^3\mathbf{i} - 2e^{-2t}\mathbf{j} + 2\sin 4t\,\mathbf{k} + \mathbf{c}\end{aligned}$$

이고, 여기서 $\mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$ 이다. ❑



■ **공간곡선의 길이** $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$가 매끄러운 함수이면 $\mathbf{r}$에 의하여 그려지는 매끄러운 곡선의 길이는 다음과 같다.

$$s = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \qquad (3)$$



$$ds = |d\mathbf{r}|$$

호의 길이 $s(t) = \int_{t_0}^{t} |d\mathbf{r}| = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'}\, dt$

단위접선벡터 $\mathbf{u} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$

예제 9 예제 1의 재고

예제 1의 원 나선을 다시 생각해 보자. $\|\mathbf{r}'(t)\|=\sqrt{5}$이므로 (3)으로부터 $\mathbf{r}(0)$에서 임의의 점 $\mathbf{r}(t)$까지의 곡선의 길이는

$$s = \int_0^t \sqrt{5}\, du = \sqrt{5}t$$

이고, 여기서 적분을 위한 가변수(dummy variable) u를 사용하였다. $t=s/\sqrt{5}$이므로 원형 나선의 벡터 방정식을 호의 길이 s의 함수로 나타내면

$$\mathbf{r}(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + 2\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{k} \tag{4}$$

가 된다. 따라서 원형 나선의 매개방정식은

$$f(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad g(s) = 2\sin\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad h(s) = \frac{s}{\sqrt{5}}$$

이다. ❑