Lecture Notes for
Introduction to Probability and Statistics
© 2013, Sungkuk Lim
Hanyang University, Ansan, 425-791, Korea
calltimy@hanyang.ac.kr

Probability and Statistics / 확률과 통계

강의노트 04

# 확률 2

## 36. 확률에 관한 기본 정리 1

P[S] = 1, S는 모든 근원사건(Sample Space)
P[∅] = 0, ∅는 공사건(impossible event)
P[A] ≧ 0, A는 어떤 사건(근원사건의 집합)
P[A’] = P[$A^c$] = 1-P[A], 여사건
A1, A2, A3 가 상호배반(mutually exclusive)이면, P[A1∪A2∪A3⋯] = P[A1] + P[A2] + P[A3] + ⋯
P[A1∪A2] = P[A1] + P[A2] - P[A1∩A2]

## 37. Example 2.1.3. 해수에 들어있는 납과 수은 함유정도를 조사한 결과 다음 결과가 나왔다.

납 함유 : .32 -> P[A1]
수은함유 : .16 -> P[A2]
납 또는 수은 함유 : .38 -> P[A1∪A2]

납과 수은에 모두 오염된 정도(P[A1∩A2])는 얼마인가?

(a)
P[A1∪A2] = P[A1] + P[A2] - P[A1∩A2]
P[A1∩A2] = P[A1] + P[A2] - P[A1∪A2]
= .32 + .16 - .38
= .10

## 38. 기본연산

사건 : 근원사건의 집합, 예를 들면 2개의 주사위(하나는 희고, 하나는 검은 주사위)를 던져 눈의 합이 7이 되는 것 - 사건

| 사건 | 사건에 속하는 근원사건 | 확률 |
|---|---|---|
| A:숫자합 3 | {(1,2),(2,1)} | P[A]=2/36 |
| B:숫자합 6 | {(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)} | P[A]=5/36 |
| C:흰눈 1 | {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)} | P[A]=6/36 |
| D:검은눈 7 | ∅ | P[A]=0/36 |

## 39. 확률에 관한 기본 정리 2

근원사건 대신 사건을 사용하여 논리적 연산으로 사건들을 결합, 다른 사건을 만들 수 있다.
AND, OR, NOT

- E and F : 사건 E 와 F 가 둘 다 일어난다.
- E or F : 사건 E 또는 F 가 일어난다.
- not E : 사건 E 가 일어나지 않는다.

## 40. 덧셈정리

P[E∪F] = P[E] + P[F] - P[E∩F] (36번 동일)
P[E OR F] = P[E] + P[F] - P[E AND F]

※ 배반사건(mutually exclusive)의 경우
P[E OR F] = P[E] + P[F]

41. 뺄셈정리

P[E] = 1 - P[NOT E]

사건 E를 두 주사위 모두 1이 나오는 경우 이외의 사건으로 정의하면,

(a) P[E] = 1 – P[NOT E]
= 1 – 1/36
= 35/36

42. 조건부 확률

주사위 시행을 조금 바꿔서 희색 주사위를 던진 다음 검은색 주사위를 던진다. 두 주사위 눈을 합해 3이 될 확률(사건 A)은 얼마인가?

**사건에 속하는 근원사건 : {(1,2), (2,1)}**

(a) P[A] = 2/36

흰색 주사위가 1이 나왔다(사건C). 그때 사건 A 의 확률은?

주사위를 던지기 전에는 표본공간이 36(=6x6)개의 근원사건을 가지고 있었지만 사건 C가 일어났기 때문에 근원사건은 C로 인해 축소된 표본공간(6)에 속하게 된다.

- 축소된 표본공간 = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)}
- 이중 사건A 에 해당되는 것은 {(1,2)} 하나 뿐

(a) P[A] = 1/6 ? wrong!!

P[A|C] : C사건이 이미 일어난 조건에서 A사건이 일어날 확률, "C가 주어졌을 때 A의 확률"

(a) P[A|C] = 1/6

$$P[A|C] = \frac{P[A\ AND\ C]}{P[C]}$$

A가 일어나면 A가 일어난다는 것은 확실(당연)하다.

P[A|A] = 1

A와 C가 상호배반이면,

P[A|C] = 0

정리하면

P[A AND C] = P[A|C]·P[C]

A와 C를 바꾸면

P[C AND A] = P[C|A]·P[A]

P[C AND A] = P[A AND C]  이므로

P[A|C]·P[C] = P[C|A]·P[A]

43. 독립사건과 종속사건

- 독립사건 : 두 사건 E, F 가 하나의 사건이 일어나든 일어나지 않든 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주지 않으면 E 와 F는 서로 독립이다. 예를 들어 1개의 주사위를 굴리는 것은 다른 주사위를 굴리는 데 아무런 영향을 주지 않는다.
- 종속사건 : 두 사건 E, F 가 하나의 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 준다면 E 와 F는 종속이다. 날씨와 에어컨 판매량과의 관계.

44. 특별 곱셈정리

사건 E 와 F 가 독립이면 다음의 특별 곱셈정리가 된다.

P[E AND F] = P[E]・P[F]

C : 흰색 주사위가 1이 나오는 사건

D : 검은색 주사위가 1이 나오는 사건

P[C|D] = P[C AND D] / P[D]
= (1/36)/(1/6)
= 1/6

A ; 두 주사위 눈의 합이 3이 되는 사건

$$\begin{aligned} P[A|C] &= P[A \text{ AND } C]/P[C] \\ &= P[(1,2)]/P[C] \\ &= (1/36)\ /\ (1/6) \\ &= 1/6 \\ &\neq P[A], \qquad (P[A]=1/18) \end{aligned}$$

$P[A \text{ AND } C] = 1/36$
$P[A] = 1/18$
$P[C] = 1/6$

$P[A \text{ AND } C] \neq P[A] \cdot P[C]$

$\therefore$ A 와 C 는 독립이 아니다.

45. 확률 법칙 요약 정리

| |
|---|
| 덧셈정리<br>P[E OR F] = P[E] + P[F] - P[E AND F]<br><br>특별 덧셈 정리 : E, F 가 상호배반일 때<br>P[E OR F] = P[E] + P[F]<br><br>뺄셈정리<br>P[E] = 1 – P[NOT E]<br><br>곱셈정리<br>P[E AND F] = P[E\|F]P[F]<br><br>특별 곱셈정리 : E 와 F가 독립일 때<br>P[E AND F] = P[E]P[F] |

46. 드 메레의 문제

주사위 1개를 네 번 던져서 적어도 6이 한번 이상 나오는 확률과 2개의 주사위를 24번 던져서 둘 다 6이 나오는 확률 중 어느 것이 더 높은가?